Devoir sur Table 6

Durée : 4h

- Tous les documents sur papier sont interdits.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées.
- Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
- La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
- Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
- Mettez en évidence vos résultats en les encadrant.
- Conformément au règlement de la Banque PT
  - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
  - L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :
- Mise en évidence des résultats
- Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
- Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
- Respect de la grammaire et de l'orthographe

Exercice 1

(*adapté de Banque PT, Maths B, 2019*)

Dans cet exercice, l'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

On considère la famille de droites $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'équation cartésienne

$$(t^2-1)x - 2ty = 2t(t-1).$$

1. *Question préliminaire.* Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $(a,b)\neq(0,0)$. On considère alors la droite D d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ ainsi que le point M_0 de coordonnées $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.
   (a) Démontrer que les coordonnées du projeté orthogonal H_0 de M_0 sur la droite D sont : $\left(x_0 - a\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}, y_0 - b\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}\right)$.
   (b) En déduire la distance $d(M_0,D)$ du point M_0 à la droite D.
2. (a) Déterminer l'ensemble des points du plan équidistants des droites D_{-1}, D_0 et D_1.
   (b) En déduire qu'il existe un unique point, dont on précisera les coordonnées, équidistant de toutes les droites $D_t, t\in R$.
3. (a) Soit t un réel fixé. Donner un point, un vecteur directeur puis une représentation paramétrique de la droite D_t.
   (b) Démontrer qu'une représentation paramétrique de l'enveloppe Γ de la famille de droites $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{2t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{(1-t)^2}{1+t^2} \end{cases}, t\in\mathbb{R}$$

4. On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre $\Omega(1,1)$ et de rayon 1.
   (a) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}$
   (b) Montrer que $\Gamma\subset\mathscr{C}$
   (c) A-t-on $\Gamma=\mathscr{C}$? Une réponse justifiée est attendue.

Exercice 2

(adapté de Banque PT, Maths C, 2025)

Dans cet exercice, l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère la conique $\mathcal{C}$ d'équation

$$23x^2 - 72xy + 2y^2 + 8x + 69y = 108$$

1. Écrire la matrice A associée à l'équation de la conique $\mathcal{C}$.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
3. Donner une équation réduite de $\mathcal{C}$ ainsi qu'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}'$ dans lequel cette équation est obtenue.
4. Donner la nature de $\mathcal{C}$
5. Déterminer les principaux éléments caractéristiques de $\mathcal{C}$ (centre éventuel, sommets, asymptotes éventuelles). Les coordonnées des points et les équations des éventuelles asymptotes seront données dans le repère $\mathcal{R}'$ puis dans le repère $\mathcal{R}$
6. Tracer $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}$ sur la feuille de papier millimétrée fournie.

   On mettra en évidence le repère $\mathcal{R}'$ ainsi que les éléments déterminés dans la question 5. On prendra $\sqrt{2} \simeq 1.4$ Unité : 2 cm .

Exercice 3

(Banque PT, Maths A, 2019)

Pour A appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note $A^\top$ la transposée de la matrice A. est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite antisymétrique si $A^\top = -A$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que tout matrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

3. En déduire une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ et $\dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R}))$.
4. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, $\det(A) = 0$.
5. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, il existe un unique vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ tel que A soit la matrice de l'application $v \mapsto w \wedge v$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
6. Soit r une rotation dans $\mathbb{R}^3$ d'angle différent de π (modulo 2π) et soit R sa matrice dans la base canonique.
   (a) Montrer que $R - R^{-1} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Soit w l'unique vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $R - R^{-1}$ soit la matrice de l'application $u : v \mapsto w \wedge v$ dans la base canonique. Montrer que $w \neq 0$.
   (c) Soit $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $r(v) = v$. Montrer que $u(v) = 0$.

   En déduire que l'axe de la rotation est dirigé par w.
   (d) On suppose que l'axe de la rotation r est orienté selon w et soit $\theta \in [0, 2\pi[$ une mesure de l'angle de r. On pose $e_3 = \dfrac{w}{\|w\|}$ et on considère une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3).
      i. Écrire les matrices de r et de r^{-1} dans cette base.
      ii. Écrire la matrice de u dans cette base.
      iii. En déduire que $\sin\theta > 0$, puis que $\theta = \arccos\left(\dfrac{\mathrm{Tr}(R) - 1}{2}\right)$
   (e) Identifier l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Problème

(adapté de Banque PT, Maths B, 2017)

Dans ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 fixé et $\mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n.

Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on note $\mathcal{B}_{k,n}(X)$ le polynôme

$$\mathcal{B}_{k,n}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}.$$

Pour $p = 2$ ou 3, $\mathbb{R}^p$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé d'origine O.

Si $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sont $(n+1)$ points de $\mathbb{R}^p$, on appelle courbe de Bézier associée aux points de contrôle $A_0, A_1, \ldots, A_n$, la courbe paramétrée définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall t \in [0,1], \quad \overrightarrow{OM(t)} = \sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(t)\, \overrightarrow{OA_k}.$$

Enfin, on note $[\![0;n]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre 0 et n.

Questions de cours

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathcal{B}_{k,n}(X)$.
2. Soient $t \in [0,1]$ et X_n une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ telle que pour tout k dans $[\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(X_n = k) = \mathcal{B}_{k,n}(t)$.
   (a) Donner le nom et le(s) paramètre(s) de la loi de probabilité suivie par X_n.
   (b) Préciser l'espérance et la variance de X_n.
   (c) Donner un exemple d'une telle variable aléatoire X_n.
3. Rappeler quelle est la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Donner la définition de deux espaces vectoriels orthogonaux pour un produit scalaire noté φ.

Préliminaires

5. Développer les polynômes $\mathcal{B}_{k,2}(X)$ pour $0 \leqslant k \leqslant 2$, et les polynômes $\mathcal{B}_{k,3}(X)$ pour $0 \leqslant k \leqslant 3$.
6. Démontrer que $(\mathcal{B}_{k,2}(X))_{0 \leqslant k \leqslant 2}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
7. Démontrer que $(\mathcal{B}_{k,n}(X))_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie I — Un produit scalaire

On considère la fonction φ définie pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + \frac{1}{4}\left(4P\left(\frac{1}{2}\right) - P(1) - P(0)\right)\left(4Q\left(\frac{1}{2}\right) - Q(1) - Q(0)\right).$$

8. (a) Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Orthonormaliser, pour le produit scalaire φ, la base $(X^2, X, 1)$ de $\mathbb{R}_2[X]$. On exprimera cette nouvelle base orthonormée à l'aide des polynômes $(\mathcal{B}_{k,2}(X))_{0 \leqslant k \leqslant 2}$.
9. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base $(\mathcal{B}_{2-k,2}(X))_{0 \leqslant k \leqslant 2}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Justifier sans calcul que la matrice M est diagonalisable.
   (b) Diagonaliser M. On prendra, si possible, une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de M et on précisera la matrice diagonale D, la matrice de passage Q, son inverse Q^{-1} ainsi que la relation liant ces matrices.
   (c) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

(d) Démontrer que les sous-espaces propres de f sont orthogonaux pour φ.

10. On suppose dans cette question que n est à nouveau quelconque. Démontrer qu'il existe un produit scalaire Ψ sur $\mathbb{R}_n[X]$ pour lequel la base $(\mathcal{B}_{k,n}(X))_{0\leqslant k\leqslant n}$ est orthonormée. On pourra exprimer ce produit scalaire à l'aide des coordonnées des polynômes dans la base $(\mathcal{B}_{k,n}(X))_{0\leqslant k\leqslant n}$.

Partie II — Une première courbe de Bézier dans le plan

Dans cette partie et les deux suivantes, on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$. On considère la courbe de Bézier Γ_1 associée aux points de contrôle A_0, A_1, A_2 et A_3 de coordonnées respectives $(0,0)$, $(2,2)$, $(1,3)$ et $(1,-1)$. On considère également la courbe Γ_2 dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_2(t) & = & 6t-9t^2+4t^3 \\ y_2(t) & = & 6t-3t^2-4t^3 \end{array}\right., \ t\in\mathbb{R}.$$

11. (a) Donner une représentation paramétrique de Γ_1.
    (b) Quelle remarque peut-on faire concernant les courbes Γ_1 et Γ_2 ?
12. *Étude de* Γ_2.
    (a) Construire les tableaux de variations des fonctions x_2 et y_2.
    (b) Déterminer les points réguliers de Γ_2 dont la tangente à Γ_2 est horizontale ou verticale.
    (c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à Γ_2 au point de paramètre $t=0$.
    (d) Déterminer le point singulier de Γ_2. Préciser sa nature ainsi que la tangente à Γ_2 en ce point.
    (e) Donner la nature des branches infinies de Γ_2. Illustrer la réponse par un schéma sur la copie.
13. Tracer dans le repère $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$, la courbe Γ_1, les points A_0, A_1, A_2 et A_3 ainsi que les tangentes à Γ_1 obtenues aux questions précédentes.
    On utilisera la feuille de papier millimétrée fournie. Le tracé de Γ_2 n'est pas demandé. Il est conseillé de prendre une unité de 6 cm.

Partie III — Le cas général.

Dans cette partie, on se place encore dans le plan mais n est désormais quelconque.

On considère $(n+1)$ points de $\mathbb{R}^2$, $A_0, A_1, \ldots, A_n$, et on note Γ la courbe de Bézier associée aux points de contrôle $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

14. Que peut-on dire des points de Γ de paramètre $t=0$ et $t=1$?
15. On suppose dans cette question que les points A_0 et A_1 sont distincts. Démontrer que la tangente à Γ en A_0 et la droite (A_0A_1) sont confondues.
    On admettra que si les points A_n et A_{n-1} sont distincts, alors la tangente à Γ en A_n et la droite $(A_{n-1}A_n)$ sont confondues.
16. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. On considère la courbe Λ dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & P(t) \\ y(t) & = & Q(t) \end{array}\right., \ t\in[0,1]$.
    Est-il possible de trouver $(n+1)$ points $A_0, A_1, \ldots, A_n$ tels que Λ soit la courbe de Bézier associée aux points de contrôle $A_0, A_1, \ldots, A_n$?

Pierre Bézier (1910-1999) est un ingénieur (Arts et Métiers et Supélec) et un docteur en mathématiques français. Il est le père fondateur de la CAO. Il fit carrière chez Renault où il mit au point les premières machines transfert.

Les courbes qui portent son nom, décrites en 1962, sont utilisées pour concevoir des pièces pour automobiles à l'aide d'ordinateurs. Elles sont également utilisées dans de nombreux logiciels de dessin et pour certaines polices de caractère.

Les polynômes $\mathcal{B}_{k,n}$ *sont appelés polynômes de Bernstein.*

Sergei Bernstein (1880-1968) est un mathématicien ukrainien dont les travaux ont porté sur les équations différentielles, l'analyse fonctionnelle et les probabilités.